Mardi

Analyse II réelle (automne 2018) **Série 1**

(à rendre le 25.09 au début de la séance d'exercices)

Soit $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors, $||\mathbf{x}|| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ est la norme euclidienne de $\mathbf{x}$.

Définition. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$. Une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est *continue* en $\mathbf{x}_0 \in U$ si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ t.q. on a $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \epsilon$ pour tout $\mathbf{x} \in U$ vérifiant $||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| < \delta$.

1. (1p) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une application linéaire vérifiant les propriétés suivantes: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1$ si $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ et $f(3, 2, 1) = 13$. Trouver $f(1, 2, 3)$.

2. (2p) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une application linéaire non nulle telle que $f(1, 2, 3) = f(3, 2, 1) = 0$. Trouver la distance euclidienne entre le point $\mathbf{z} = (2, 3, 1)$ et le plan $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\mathbf{x}) = 0\}$.

3. (4p) On considère les fonctions suivantes sur $U = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Sont-elles continues en $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$? Justifier les réponses.

a) $g(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{x_1^2 \ln(1+|x_2|)}{x_1^4 + x_2^2} & \text{si } \mathbf{x} \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ **b)** $f(\mathbf{x}) = \begin{cases} x_1 + x_2 \sin \frac{1}{x_1} & \text{si } x_1 \neq 0, \\ x_2 \ln |x_2| & \text{si } x_1 = 0, x_2 \neq 0, \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} = 0. \end{cases}$

c) $h(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\sin(x_1 x_2)}{\sqrt{\sin(x_1^2) + \sin(x_2^2)}} & \text{si } \mathbf{x} \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

4. (2p) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant les deux propriétés suivantes: $f(x_1, x_2)$ est continue en $x_1 = a$ pour tout x_2 fixé et on a $|f(x_1, x_2) - f(x_1, b)| \leq 5|x_2 - b|$ pour tout x_1. Déterminer si f est continue en $\mathbf{x}_0 = (a, b)$.

5. (4p) Dons les cas suivants, calculer l'intégrale $\int_U f \, dx_1 dx_2$ au moyen d'intégrales itérées.

a) U est le triangle de sommets $(0, \pi)$, $(\pi/3, 0)$, $(\pi, \pi/2)$ et $f(x_1, x_2) = \cos(x_1 + x_2)$.

b) $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| + x_2^2 \leq 1\}$ et $f(x_1, x_2) = \exp(x_2)$.

6. (2p) Déterminer les coordonnées du centre d'inertie du tétraèdre $T = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 \leq 1\}$ si sa masse volumique est donnée par $\rho(x_1, x_2, x_3) = (2 - x_3)\rho_0$.
[Pour un objet continu $U \subset \mathbb{R}^3$, les coordonnées (X_1, X_2, X_3) du centre d'inertie sont données par $X_i = \frac{1}{M} \int_U x_i \, \rho(x_1, x_2, x_3) \, dx_1 dx_2 dx_3$, où $M = \int_U \rho(x_1, x_2, x_3) \, dx_1 dx_2 dx_3$ est la masse de l'objet.]

/15

mardi

Analyse II réelle (automne 2018) **Série 2**

(à rendre le 02.10 au début de la séance d'exercices)
Les réponses peuvent être données en français ou en anglais.

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction.
Définition. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n))$ est la *dérivée partielle* de f par rapport à x_i.
Définition. $f \in C^1(U)$ si $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C(U)$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. $f \in C^2(U)$ si $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \in C(U)$ pour tous $i, j = 1, \ldots, n$.
Théorème. Si U est un ouvert et $f \in C^2(U)$, alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ pour tous $i, j = 1, \ldots, n$.

1. (1p) Soit $f(x_1, x_2) = \ln\big(2 + e^{-x_1^2}\cos(x_1 x_2^3)\big)$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}$.

2. (1p) Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. On considère la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $F(x_1, x_2) = f\big(f(x_1, x_1 + x_2), f(x_2, x_1 x_2)\big)$. Calculer $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial F}{\partial x_2}$.

3. (3p) Dans les cas suivants, trouver le domaine maximale $U \subset \mathbb{R}^2$ tel que $f \in C^1(U)$. Justifier les réponses.

a) $f(\mathbf{x}) = ||\mathbf{x}||$, b) $f(\mathbf{x}) = \sqrt{|x_1 x_2|}$, c) $f(\mathbf{x}) = \begin{cases} e^{-1/(x_1^2+x_2^2)} & \text{si } \mathbf{x} \neq 0, \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} = 0. \end{cases}$

4. (1p) Trouver toutes les fonctions $f(x_1, x_2)$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant le système suivant d'équations:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{1 + e^{-x_1 - x_2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -\frac{1}{1 + e^{x_1 + x_2}}.$$

5. (2p) Trouver toutes les fonctions $f(x, y)$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant le système suivant d'équations:

$$x^3 \frac{\partial f}{\partial x} = 2\big(f(x,y)\big)^2 + 2y f(x,y) + 2x^2 y, \qquad y^2 \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 f(x,y) - x^2 y - \big(f(x,y)\big)^2.$$

[Indication: utiliser une propriété des dérivées partielles d'ordre 2.]

6. (2p) Trouver toutes les fonctions $f(x)$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ la relation suivante

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + xy\big(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{3}y^2\big).$$

7. (2p) Soit $U \subset \mathbb{R}^n$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. Les *lignes de niveau* de f sont les ensembles $\{\mathbf{x} \in U \,|\, f(\mathbf{x}) = c\}$, où $c \in \mathbb{R}$. Représenter graphiquement les lignes de niveau des fonctions suivantes:

a) $g(x_1, x_2) = \max(|x_1|, |x_2| - 1)$, b) $h(x_1, x_2) = \dfrac{x_1}{1 + x_1^2 + x_2^2}$.

Mardi

Analyse II réelle (automne 2018) **Série 3**

(à rendre le 09.10 au début de la séance d'exercices)
Les réponses peuvent être données en français ou en anglais.

Définition. Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. On note par $T_\mathbf{x}\mathbb{R}^n$ *l'espace tangent* à $\mathbb{R}^n$ en $\mathbf{x}$, c.-à-d. l'espace vectoriel engendré par les vecteurs déplacement dont l'origine est $\mathbf{x}$.

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soit $\mathbf{x} \in U$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition. f est dite *dérivable* en $\mathbf{x}$ s'il existe une forme linéaire $df \in (T_\mathbf{x}\mathbb{R}^n)^*$ telle que $\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{1}{\|h\|}\left|f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - df(\mathbf{h})\right| = 0$.

Théorème. a) Si f est dérivable en $\mathbf{x}$, alors $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ en $\mathbf{x}$ existe pour tout $i = 1, \ldots, n$ et on a $df(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i$ pour tout $\mathbf{h} \in T_\mathbf{x}\mathbb{R}^n$.

b) Si $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont continues en $\mathbf{x}$, alors f est dérivable en $\mathbf{x}$.

On a $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$, où dx_i est la forme linéaire telle que $dx_i(h) = h_i$.

Définition. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in C^k(U)$. Alors, $\omega = \sum_{i=1}^n \alpha_i \, dx_i$ est une *1-forme différentielle* de classe C^k sur U.

Définition. Une 1-forme différentielle ω sur U est *exacte* s'il existe $f \in C^1(U)$ telle que $\omega = df$. On dit que f est une *primitive* de ω.

Définition. Le *gradient* de f en $\mathbf{x}$ est le vecteur $\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \in T_\mathbf{x}\mathbb{R}^n$.

1. (3p) Déterminer si les fonctions suivantes sont dérivables en $\mathbf{x} = (0,0)$.

a) $f(\mathbf{x}) = \sqrt[3]{x_1^3 + x_2^3}$, **b)** $f(\mathbf{x}) = \cos\left(\sqrt[3]{x_1 x_2}\right)$.

2. (1p) Soit $\omega = x_1 x_3 \, dx_1 - x_1^2 \, dx_2 + 2x_2 \, dx_3$. Calculer $\omega(\mathbf{h})$ en $\mathbf{x} = (1,2,3)$ si $\mathbf{h} = (2,1,-3)$.

3. (2p) Pour les fonctions suivantes, calculer $df(\mathbf{h})$ en $\mathbf{x} = (1,2)$ si $\mathbf{h} = (3,-4)$.

a) $f(\mathbf{x}) = \frac{x_1}{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \sin\left(\frac{1}{6}\pi t^2\right) dt$, **b)** $f(\mathbf{x}) = |x_1|^{x_1 x_2}$.

✓ **4.** (2p) Déterminer si les formes suivantes sur $\mathbb{R}^2$ sont exactes. Si c'est le cas, trouver une primitive de ω.

a) $\omega = 2\arctan(x_1 \sin x_2) \, dx_1 + \ln\left(1 + x_1^2 (\sin x_2)^2\right) dx_2$.

b) $\omega = -(\cos x_2)^2 \sin(2x_1) \, dx_1 + (\sin x_1)^2 \sin(2x_2) \, dx_2$.

✓ **5.** (2p) Trouver une fonction $g \in C^1(\mathbb{R}^3)$ pour laquelle la forme

$$\omega = (x_1 x_2^2 + x_1 x_3) \, dx_1 + (x_1^2 x_2 - x_2^2 x_3^2) \, dx_2 + g(x_1, x_2, x_3) \, dx_3$$

est exacte sur $\mathbb{R}^3$ et trouver une primitive correspondante de ω.

6. (2p) Soit $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2$. Trouver une fonction $g(x_1, x_2)$ dont les lignes de niveau sont orthogonales à celles de f (c.-à-d. pour tout point $\mathbf{x}$, les lignes de niveau de f et g passant par $\mathbf{x}$ sont orthogonales en $\mathbf{x}$).

Mardi

Analyse II réelle (automne 2018) **Série 4**

(à rendre le 16.10 au début de la séance d'exercices)
Les réponses peuvent être données en français ou en anglais.

Définition. Une *courbe paramétrée* dans $\mathbb{R}^n$ est une application $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 (ou C^1 par morceaux). $\Gamma = \gamma([a,b]) \subset \mathbb{R}^n$ est le *support* de γ. γ est *simple* si γ est injective sur (a,b). γ est *fermée* si $\gamma(b) = \gamma(a)$.

Définition. Soit $\omega = \sum_{i=1}^n \alpha_i \, dx_i$ une 1-forme différentielle sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$. Soit $\gamma : [a,b] \to U$ une courbe paramétrée. On définit *l'intégrale curviligne* de ω le long de γ par $\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b \left(\alpha_i(\gamma(t)) \frac{d\gamma_i}{dt}\right) dt$. Si γ est de classe C^1 par morceaux, on pose $\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{m-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \left(\alpha_i(\gamma(t)) \frac{d\gamma_i}{dt}\right) dt$, où $a \doteq a_0 < a_1 < \ldots < a_m = b$ est une subdivision de $[a,b]$ telle que γ est de classe C^1 sur chaque segment $[a_k, a_{k+1}]$.

Théorème. Soient ω une 1-forme différentielle exacte sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et $f \in C^1(U)$ une primitive de ω. Soit $\gamma : [a,b] \to U$ une courbe paramétrée. Alors, $\int_\gamma \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$. En particulier, $\int_\gamma \omega = 0$ si γ est fermée.

$\boxed{1.}$ (3p) On note par p, v les coordonnées cartésiennes dans le plan $\mathbb{R}^2$. Soient c_p et c_v des constantes positives. On considère la 1-forme différentielle $\omega = c_v v \, dp + c_p \, p \, dv$ sur $U = \{(p,v) \in \mathbb{R}^2 \mid p > 0, v > 0\}$. Dans le cas suivants, calculer l'intégrale de ω le long de la courbe Γ allant du point (p_0, v_0) au point (p_1, v_1).

a) $\Gamma = \{(p,v) \in U \mid p\,v = p_0 v_0\}$. b) $\Gamma = \{(p,v) \in U \mid p^{c_v} v^{c_p} = p_0^{c_v} v_0^{c_p}\}$.

[Remarque: En thermodynamique, le premier cas correspond à un processus isotherme et le deuxième à un processus adiabatique.]

2. (3p) Dans le cas suivants, calculer l'intégrale de la forme différentielle ω le long de la courbe Γ. [Indication: commencer par choisir un paramétrage de Γ.] γ $(3,4) \longrightarrow$

a) $\omega = x_2 \, dx_1 + \pi \tan\left(\frac{\pi x_1}{12}\right) dx_2$. Γ est le segment de droite allant du point $(3,4)$ au point $(4,2)$. $\gamma_1 \; 3 \to 4$ $\gamma_2 \; 4 \to 2$

b) $\omega = 2x_2 \ln\left(1 + \frac{x_2}{x_1}\right) dx_1 - x_1 \ln\left(1 + \frac{x_1}{x_2}\right) dx_2$ sur $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0, x_2 > 0\}$. $\Gamma \subset U$ est l'arc de la parabole d'équation $x_2 = x_1^2$ pour x_1 allant de 1 à 2.

$\boxed{3.}$ (4p) Dans le cas suivants, calculer l'intégrale de la forme différentielle ω le long de la courbe paramétrée γ dans $\mathbb{R}^2$. $\gamma(a) = (0,1)$

a) $\omega = (\cos 2x_1)\sqrt{1 + 2x_2}\, dx_1 + \cos x_1 \, dx_2$. $\gamma(t) = (t, |\cos 2t|)$, $t \in [0, \pi/2]$. $\gamma(b) = (\frac{\pi}{2}, 1)$

b) $\omega = \dfrac{x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2}{(x_1 + x_2)^3} dx_1 + \dfrac{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2}{(x_1 + x_2)^3} dx_2$ sur $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0, x_2 > 0\}$. $\gamma(t) = (t, 1 + \sin(\frac{\pi}{2} t))$, $t \in [1, 2]$.

$\gamma(1) = (1, 2)$

$\gamma(2) = (2, 1)$

$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$

$\sum \int \sum \alpha_1(\gamma_i(t)) \frac{\partial \gamma_i}{\partial t}(t) \, dt$

$= \int \alpha_1(\gamma_1(t)) \cdot \frac{\partial \gamma_1(t)}{\partial t} \, dt + \int_0^1 \alpha_2(\gamma_2(t)) \frac{\partial \gamma_2}{\partial t}$

Mardi

Analyse II réelle (automne 2018) **Série 5**

(à rendre le 23.10 au début de la séance d'exercices)
Les réponses peuvent être données en français ou en anglais.

Théorème (la formule de Green-Riemann).
Soient $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, $K \subset U$ un compact à bord orienté. Soit $\omega = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2$ une 1-forme différentielle de classe C^1 sur U. Alors, $\int_{\partial K} \omega = \int_K \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2$.

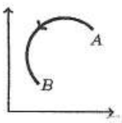
√ **1.** (1p) On considère sur $U = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 > 0\}$ la 1-forme différentielle $\omega = \dfrac{x_1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^4} dx_1 + \dfrac{x_2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^4} dx_2 + \dfrac{2x_3^3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^4} dx_3$.
Calculer l'intégrale $\int_\gamma \omega$, où γ est la courbe paramétrée $\gamma : [1,2] \to U$ définie par $\gamma(t) = \big(t\cos(\pi t), t\sin(\pi t), t\big)$.

2. (2p) On considère sur $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0, x_2 > 0\}$ la 1-forme différentielle $\omega = \dfrac{\cos x_1 - x_1 x_2}{x_1^2} dx_1 + \dfrac{\sin x_2 + x_1 x_2}{x_2^2} dx_2$. Calculer l'intégrale de ω sur le contour du triangle de sommets $A = (2,1)$, $B = (2,2)$, $C = (1,2)$, parcouru dans le sens direct.

3. (2p) Utiliser la formule de Green–Riemann pour calculer l'aire du domaine K délimité par la courbe paramétrée $\gamma(t) = \big((\cos t)^3, (\sin t)^3\big)$, $t \in [0, 2\pi]$.
[Indication: considérer la forme différentielle $\omega = -\frac{1}{2}x_2 dx_1 + \frac{1}{2}x_1 dx_2$.]

4. (2p) Utiliser la formule de Green–Riemann pour déterminer les coordonnées du centre d'inertie du demi-disque homogène $K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq R,\ x_2 \geq 0\}$.
[Indication: il s'agit de calculer $X_i = \frac{1}{M}\int_K x_i \, dx_1 dx_2$, où $M = \int_K 1 \, dx_1 dx_2$. Évidemment, on a $X_1 = 0$ grâce à la symétrie de K.]

5. (2p) On considère sur $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0, x_2 > 0\}$ la 1-forme différentielle $\omega = x_2 \ln\left(\frac{3x_2}{x_1}\right) dx_1 + x_1 \ln\left(\frac{3x_2}{x_1}\right) dx_2$. Calculer l'intégrale de ω sur le demi-cercle supérieur de diamètre $2\sqrt{2}$ allant du point $A = (3,3)$ au point $B = (1,1)$.



(à rendre le 30.10 au début de la séance d'exercices)
Les réponses peuvent être données en français ou en anglais.

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Définition. Une application $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ est appelée une *forme bilinéaire alternée* sur V si a) $\beta(\lambda v + \mu u, w) = \lambda \beta(v, w) + \mu \beta(u, w)$ et $\beta(v, \lambda u + \mu w) = \lambda \beta(v, u) + \mu \beta(v, w)$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $v, u, w \in V$ et b) $\beta(v, u) = -\beta(u, v)$ pour tous $v, u \in V$.
On note $\Lambda^2(V)$ l'espace vectoriel des formes bilinéaires alternées sur V.
On note $\Lambda^1(V) = V^*$ l'espace vectoriel des formes linéaires sur V.
Définition. Soient $\phi_1, \phi_2 \in \Lambda^1(V)$. Alors, l'application $\phi_1 \wedge \phi_2 : V \times V \to \mathbb{R}$ définie pour tous $v, u \in V$ par $(\phi_1 \wedge \phi_2)(v, u) = \det \begin{pmatrix} \phi_1(v) & \phi_1(u) \\ \phi_2(v) & \phi_2(u) \end{pmatrix}$ est le *produit extérieur* de ϕ_1 et ϕ_2.

1. (1.5p) Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ le domaine délimité par l'axe x_1 et la courbe paramétrée $\gamma(t) = \big((\cos t)^3, (\sin t)^3\big)$, $t \in [0, \pi]$. En calculant une intégrale curviligne sur ∂K, trouver le volume du solide de révolution engendré par la rotation de K autour de l'axe x_1.

2. (3p) Soit $\omega = \dfrac{2x_1x_2}{1 - 2x_1^2 + x_1^4 + x_2^2}\, dx_1 + \dfrac{1 - x_1^2}{1 - 2x_1^2 + x_1^4 + x_2^2}\, dx_2$.

a) Calculer l'intégrale de ω le long du cercle d'équation $(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 3$, parcouru dans le sens direct.

b) Sans faire de calcul, expliquer pourquoi le résultat peut être différent pour le cercle d'équation $(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 5$.

3. (2p) Soit $\beta \in \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$, $\beta \neq 0$. Soient $v, u \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs non nuls. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses? (Démontrer ou donner un contre-exemple.)

a) Si $\beta(v, u) = 0$, alors v et u sont colinéaires.

✓ **b)** Si $\beta(v, u) \neq 0$, alors $\beta(x, y) \neq 0$ pour tous vecteurs x, y non nuls, non colinéaires appartenant au sous-espace engendré par v et u.

✓ **4.** (1.5p) Soient $V = \mathbb{R}^3$, $\phi_1 = dx_1 + 2dx_2 - 3dx_3$, $\phi_2 = 4dx_1 - dx_2 + 2dx_3$. Exprimer $\phi_1 \wedge \phi_2$ sous la forme $\alpha_1 dx_1 \wedge dx_2 + \alpha_2 dx_1 \wedge dx_3 + \alpha_3 dx_2 \wedge dx_3$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Calculer $(\phi_1 \wedge \phi_2)(v, u)$ si $v = (1, 2, 3)$, $u = (3, 2, -1)$.

5. (3p) Soit $\beta \in \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ la forme bilinéaire alternée donnée par $\beta = \sum_{1 \le i < j \le n} dx_i \wedge dx_j$. Déterminer l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles l'affirmation suivante est vraie: pour toute forme linéaire $\phi \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ il existe un vecteur $w_\phi \in \mathbb{R}^n$ tel que $\phi = \beta(w_\phi, \cdot)$, c.-à-d. on a $\phi(u) = \beta(w_\phi, u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$.

[Indication: on pourra commencer par considérer les cas $n = 2$ et $n = 3$.]

$dx_1 \wedge dx_2 = v_1 u_2 - v_2 u_1$

(à rendre le 06.11 au début de la séance d'exercices)
Les réponses peuvent être données en français ou en anglais.

Théorème. Les formes $dx_i \wedge dx_j$, $1 \leq i < j \leq n$ forment une base de $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$.

Définition. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soient $\alpha_{ij} \in C^k(U)$ pour $1 \leq i < j \leq n$. Alors, $\omega = \sum_{1\leq i<j\leq n} \alpha_{ij}\, dx_i \wedge dx_j$ est une *2-forme différentielle* de classe C^k sur U.

L'espace vectoriel des 2-formes différentielles sur U est noté $\Omega^2(U)$.

Définition. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Un *champ de vecteurs* sur U est une application $\mathbf{v} : \mathbf{x} \in U \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{x}) = (v_1(\mathbf{x}), \ldots, v_n(\mathbf{x})) \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n$.

Définition. Soient $\omega \in \Omega^2(U)$, $\mathbf{v}$ un champ de vecteurs sur U. Alors, $i_{\mathbf{v}}\omega \in \Omega^1(U)$ est la 1-forme différentielle définie en $\mathbf{x} \in U$ par $(i_{\mathbf{v}}\omega)(\mathbf{h}) = \omega(\mathbf{v}(\mathbf{x}), \mathbf{h})$ pour tout $\mathbf{h} \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n$.

1. (3p) On dit qu'une forme bilinéaire alternée $\beta \in \Lambda^2(V)$ est *non dégénérée* si, pour tout vecteur non nul $v \in V$, il existe $u \in V$ tel que $\beta(v,u) \neq 0$. Une forme $\beta \in \Lambda^2(V)$ qui ne vérifie pas cette propriété est dite dégénérée.

a) Soit $V = \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Montrer que, quelles que soient $\phi_1, \phi_2 \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$, la forme $\phi_1 \wedge \phi_2$ est dégénérée.

b) Dans les cas suivants, donner un exemple d'une forme non dégénérée $\beta \in \Lambda^2(V)$ ou démontrer qu'il n'en existe pas:

b1) $V = \mathbb{R}^3$; b2) $V = \mathbb{R}^4$.

✓ **2.** (1p) Soit $\omega = x_1x_4\, dx_1 \wedge dx_2 + x_3x_4\, dx_2 \wedge dx_3 + x_1x_3\, dx_1 \wedge dx_3 + x_2x_3\, dx_2 \wedge dx_4 \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$. Calculer $\omega(\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^2)$ en $\mathbf{x} = (1,3,2,-1)$ pour $\mathbf{h}^1 = (1,4,1,0)$, $\mathbf{h}^2 = (2,-1,3,1)$.

3. (4p) Soit $V = \mathbb{R}^3$. Soient $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$, $g(\mathbf{x}) = x_1x_2x_3$.

a) Soit le champ de vecteurs $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (x_2x_3, x_1x_3, -x_1x_2)$. Trouver le gradient de la fonction $dg(\mathbf{v}(\mathbf{x}))$.

b) On considère la 2-forme différentielle $\omega = df \wedge dg$.

✓b1) Exprimer ω sous la forme $\omega = \sum_{1\leq i<j\leq 3} \alpha_{ij}\, dx_i \wedge dx_j$, $\alpha_{ij} \in C(\mathbb{R}^3)$.

✓b2) Calculer $\omega(\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^2)$ en $\mathbf{x} = (1,2,3)$ pour $\mathbf{h}^1 = (3,4,-1)$, $\mathbf{h}^2 = (2,0,-1)$.

✓c) On considère la 1-forme différentielle $i_{\mathbf{v}}\omega$, où $\mathbf{v}$ et ω sont donnés dans a) et b). Exprimer $i_{\mathbf{v}}\omega$ sous la forme $i_{\mathbf{v}}\omega = \sum_{i=1}^3 \alpha_i\, dx_i$, $\alpha_i \in C(\mathbb{R}^3)$.

4. (2p) Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{u}$ deux champs de vecteurs sur U de classe C^1 (c.-à-d. $v_i, u_i \in C^1(U)$ pour tout i). Étant donnée une fonction $f \in C^1(U)$, on considère les fonctions $F_{\mathbf{v}}$ et $F_{\mathbf{u}}$ définies par $F_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = df(\mathbf{v}(\mathbf{x}))$ et $F_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = df(\mathbf{u}(\mathbf{x}))$. Montrer qu'il existe un champ de vecteurs $\mathbf{w}$ sur U tel que $dF_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - dF_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) = df(\mathbf{w}(\mathbf{x}))$ pour toute $f \in C^2(U)$ et tout $\mathbf{x} \in U$.

$\forall v \neq 0 \quad \exists u \in V$ tq $\beta(v,u) \neq 0$

Analyse II réelle (automne 2018) **Série 8**

(à rendre le 13.11 au début de la séance d'exercices)
Les réponses peuvent être données en français ou en anglais.

> Définition. Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une application $\beta : V^{\times p} \to \mathbb{R}$ est appelée une *forme p-linéaire alternée* sur V si a) l'application $v \mapsto \beta(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_p)$ est $\mathbb{R}$-linéaire pour tout $1 \le i \le p$ et tous $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_p \in V$;
> b) on a $\beta(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_p) = -\beta(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_p)$ pour tous i, j.
> On note $\Lambda^p(V)$ l'espace vectoriel des formes p-linéaires alternées sur V.
> Soit $I = i_1, \dots, i_p$ un multi-indice. On note $\alpha_I = \alpha_{i_1,\dots,i_p}$ et $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$.
> Définition. Soient $\alpha = \sum_I \alpha_I \, dx_I \in \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ et $\beta = \sum_J \beta_J \, dx_J \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$. Leur *produit extérieur* est donné par $\alpha \wedge \beta = \sum_{I,J} \alpha_I \, \beta_J \, dx_I \wedge dx_J$.

√ **1.** (2p) Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soit $\beta : V^{\times p} \to \mathbb{R}$ une forme p-linéaire. Déterminer si les propriétés suivantes sont équivalentes:

a) β est alternée;

b) $\beta(v_1, \dots, v_p) = 0$ si les vecteurs $v_1, \dots, v_p$ sont linéairement dépendants.

√ **2.** (1p) Soit $V = \mathbb{R}^3$. Soit $\beta = \beta_3 \, dx_1 \wedge dx_2 - \beta_2 \, dx_1 \wedge dx_3 + \beta_1 \, dx_2 \wedge dx_3$, $\beta \ne 0$. Trouver toutes les formes linéaires $\alpha \in \Lambda^1(\mathbb{R}^3)$ telles que $\alpha \wedge \beta = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$.

√ **3.** (1p) Soit $V = \mathbb{R}^4$. Trouver toutes les formes $\gamma \in \Lambda^2(\mathbb{R}^4)$ telles que $\gamma \wedge \gamma = 0$.
[Indication: écrire γ sous la forme $\gamma = \alpha_3 \, dx_1 \wedge dx_2 - \alpha_2 \, dx_1 \wedge dx_3 + \alpha_1 \, dx_2 \wedge dx_3 + \sum_{i=1}^3 \beta_i \, dx_i \wedge dx_4$.]

4. (2p) Soit $n \ge p + 1$. Soient $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{p+1} \in \mathbb{R}^n$. Soient $\alpha \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ et $\beta \in \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$. Étant données les valeurs de $\alpha(\mathbf{v}_i)$, $1 \le i \le p + 1$ et de $\beta(\mathbf{v}_{j_1}, \dots, \mathbf{v}_{j_p})$, $1 \le j_1 < \dots < j_p \le p + 1$, trouver la valeur de $(\alpha \wedge \beta)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{p+1})$.

5. (3p) Une forme $\beta \in \Lambda^p(V)$ est dite *décomposable* s'il existe des formes $\phi_1, \dots, \phi_p \in \Lambda^1(V)$ telles que $\beta = \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_p$ (dans le cas contraire, β est dite *indécomposable*). Dans les cas suivants, donner un exemple d'une forme indécomposable $\beta \in \Lambda^2(V)$ ou démontrer qu'il n'en existe pas:

a) $V = \mathbb{R}^3$; √b) $V = \mathbb{R}^4$.

(à rendre le 20.11 au début de la séance d'exercices)
Les réponses peuvent être données en français ou en anglais.

Définition. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soient $\alpha_{i_1,\dots,i_p} \in C^k(U)$ pour $1 \le i_1 < \dots < i_p \le n$.
a) $\omega = \sum_{1\le i_1<\dots<i_p\le n} \alpha_{i_1,\dots,i_p}\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \equiv \sum_I \alpha_I\, dx_I$
est une *p-forme différentielle* de classe C^k sur U.
b) la *dérivée extérieure* de ω est la $(p+1)$-forme différentielle $d\omega = \sum_I d\alpha_I \wedge dx_I$.
Définition. a) ω est dite *exacte* s'il existe $\tilde\omega \in \Omega^{p-1}(U)$ telle que $d\tilde\omega = \omega$.
b) ω est dite *fermée* si $d\omega = 0$.
Définition. Soient $\omega \in \Omega^p(U)$, $\mathbf{v}$ un champ de vecteurs sur U. Alors, $i_{\mathbf{v}}\omega \in \Omega^{(p-1)}(U)$ est la $(p-1)$-forme différentielle définie en $\mathbf{x} \in U$ par $(i_{\mathbf{v}}\omega)(\mathbf{h}^2,\dots,\mathbf{h}^p) = \omega(\mathbf{v}(\mathbf{x}),\mathbf{h}^2,\dots,\mathbf{h}^p)$ pour tous $\mathbf{h}^2,\dots,\mathbf{h}^p \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n$.

1. (1p) Trouver $d\omega$.
✓a) $\omega = e^{x_1x_2^2x_3^3}\, dx_1$. ✓ b) $\omega = 2\sin(x_1x_2x_3)\, dx_1 \wedge dx_2 + x_1x_2^2\cos(x_1x_2x_3)\, dx_1 \wedge dx_3$.

2. (2p) Soit $U = \mathbb{R}^3$. Dans les cas suivants, déterminer si ω est exacte. Si c'est le cas, trouver une forme $\tilde\omega \in \Omega^1(U)$ telle que $d\tilde\omega = \omega$.
a) $\omega = 2x_3\, dx_1 \wedge dx_2 + x_2\, dx_1 \wedge dx_3 - x_1\, dx_2 \wedge dx_3$;
✓b) $\omega = \sin(x_1 + x_2 - x_3)\cos(x_1 - x_2 + x_3)\, dx_1 \wedge dx_2 + \sin(x_2 - x_1 - x_3)\cos(x_1 + x_2 - x_3)\, dx_1 \wedge dx_3 + \sin(x_2 + x_3 - x_1)\cos(x_2 + x_3 - x_1)\, dx_2 \wedge dx_3$.

3. (1p) Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Soit $\omega = -\dfrac{x_2}{x_1^2+x_2^2}\, dx_1 + \dfrac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\, dx_2$. Trouver $f \in C^1(U)$ telle que $d(f\,\omega) = \dfrac{1}{x_1^2+x_2^2}\, dx_1 \wedge dx_2$

4. (6p) Soit $\omega = x_1x_4\, dx_1 \wedge dx_2 + x_3x_4\, dx_2 \wedge dx_3 + x_1x_3\, dx_1 \wedge dx_3 + x_2x_3\, dx_2 \wedge dx_4 \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$.
✓a) Calculer $d\omega(\mathbf{h}^1,\mathbf{h}^2,\mathbf{h}^3)$ en $\mathbf{x} = (2,3,3,-1)$ pour $\mathbf{h}^1 = (1,4,1,0)$, $\mathbf{h}^2 = (2,-1,3,1)$, $\mathbf{h}^3 = (1,-1,1,-1)$.
✓b) Trouver une 1-forme $\phi \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$ telle que $d\phi \wedge d\phi = \omega \wedge \omega$.
✓c) Déterminer s'il existe une 1-forme $\phi \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$, $\phi \ne 0$ telle que $\omega \wedge \phi$ soit fermée.
d) Déterminer s'il existe des champs de vecteurs $\mathbf{v}$ et $\mathbf{u}$ sur $\mathbb{R}^4$ tels que
d1) $i_{\mathbf{v}}(d\omega) = x_1(x_3 - x_2)\, dx_2 \wedge dx_4$. d2) $d(i_{\mathbf{u}}\omega) = x_1(x_3 - x_2)\, dx_2 \wedge dx_4$.

(à rendre le 27.11 au début de la séance d'exercices)
Les réponses peuvent être données en français ou en anglais.

Définition. Soit $\mathbf{v}$ un champ de vecteurs de classe C^1 sur U. Alors, $\operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$ est la *divergence* de $\mathbf{v}$ et $\operatorname{rot}\mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)$ est le *rotationnel* de $\mathbf{v}$.
Théorème. a) Soient $U \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert, $f \in C^2(U)$, $\mathbf{v}$ un champ de vecteurs de classe C^1 sur U. Alors, $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$ et $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{v}) = 0$.
b) Soient $U \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert étoilé et $\mathbf{v}$ un champ de vecteurs de classe C^1 sur U. Si $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$, alors il existe $f \in C^2(U)$ telle que $\operatorname{grad} f = \mathbf{v}$. Si $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, alors il existe un champ de vecteurs $\mathbf{u}$ sur U tel que $\operatorname{rot}\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

✓ **1.** (1p) Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soit α une 1-forme différentielle de classe C^1 sur U. Étant donnée une forme différentielle ω de classe C^2 sur U, on pose $d_\alpha\omega = d\omega + \alpha \wedge \omega$. Écrire $d_\alpha(d_\alpha\omega)$ sous la forme la plus simple.

2. (2p) Soient $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$ et $\mathbf{v}$ un champ de vecteurs de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$. À l'aide des formes différentielles, démontrer les identités suivantes:
a) $\operatorname{div}(\mathbf{v} \times (\operatorname{grad} f)) = \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{rot}\mathbf{v}\rangle$. b) $\operatorname{rot}(f\mathbf{v}) = (\operatorname{grad} f) \times \mathbf{v} + f \operatorname{rot}\mathbf{v}$.

3. (8p) Dans les cas suivants, calculer $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ et $\operatorname{div}\mathbf{v}$. Dans chaque cas, trouver, s'ils existent, une fonction $f \in C^2(U)$ telle que $\operatorname{grad} f = \mathbf{v}$ et un champ de vecteurs $\mathbf{u}$ sur U tel que $\operatorname{rot}\mathbf{u} = \mathbf{v}$.
✓a) $U = \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} = (e^{x_3}\cos x_1, e^{x_3}\sin x_2, e^{-x_3})$.
b) $U = \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} = (x_2x_3\, e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2}, 2x_1x_3\, e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2}, -3x_1x_2\, e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2})$.
c) $U = \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} = (x_2x_3, x_1x_3, x_1x_2)$.
d) $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{x_3} - \frac{x_2}{x_1^2}, \frac{1}{x_1} - \frac{x_3}{x_2^2}, \frac{1}{x_2} - \frac{x_1}{x_3^2}\right)$.
e) $U = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \neq 0\}$, $\mathbf{v} = \left(-\frac{2x_2}{x_1^2+x_2^2}, \frac{2x_1}{x_1^2+x_2^2}, 0\right)$.

(à rendre le 04.12 au début de la séance d'exercices)
Les réponses peuvent être données en français ou en anglais.

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$ des ouverts.

Définition. Une application $\varphi : U \to V$ est *différentiable* en $\mathbf{x} \in U$ s'il existe une application $D\varphi : T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n \to T_{\varphi(\mathbf{x})}\mathbb{R}^m$ telle que $\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{1}{\|h\|}\|\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \varphi(\mathbf{x}) - D\varphi(\mathbf{h})\| = 0$.

Définition. Soit $\varphi : U \to V$ une application de classe C^1. Soit $\omega \in \Omega^p(V)$. Alors, le *tiré en arrière* de ω par φ est la forme différentielle $\varphi^*\omega \in \Omega^p(U)$ définie en $\mathbf{x} \in U$ par $\varphi^*\omega(\mathbf{x}; \mathbf{h}^1, \ldots, \mathbf{h}^p) = \omega(\varphi(\mathbf{x}); D\varphi(\mathbf{h}^1), \ldots, D\varphi(\mathbf{h}^p))$ pour tous $\mathbf{h}^1, \ldots, \mathbf{h}^p \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n$.

Lemme. Soit $\omega = \sum_I \alpha_I\, dy_I \in \Omega^p(V)$, où $dy_I = dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_p}$. Alors, $\varphi^*\omega = \sum_I \varphi^*\alpha_I\, d\varphi_I \in \Omega^p(U)$, où $\varphi^*\alpha_I = \alpha_I \circ \varphi$ et $d\varphi_I = d\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_p}$.

1. (3p) Soient $U = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1x_2 \neq 0\}$ et $V = \mathbb{R}^3$. Soit l'application $\varphi : U \to V$ donnée par $\varphi(x_1, x_2) = \left(x_1x_2, \frac{x_1}{x_2}, \frac{x_2}{x_1}\right)$.

√ **a)** Écrire la matrice jacobienne $D\varphi$.

√ **b)** Soit $\mathbf{h} = (4, 3)$. Calculer $\|\mathbf{h}\|$ et $\|D\varphi(\mathbf{h})\|$ en $\mathbf{x} = (1, \frac{1}{2})$ ($\|\ \|$ désigne la norme euclidienne).

√ **c)** Trouver $\varphi^*\omega$ pour $\omega = y_2\, dy_1 + y_3\, dy_2 + y_1\, dy_3 \in \Omega^1(V)$.

√ **d)** Trouver $\varphi^*\omega$ pour $\omega = y_1^2\, dy_1 \wedge dy_2 + y_2\, dy_1 \wedge dy_3 + y_3\, dy_2 \wedge dy_3 \in \Omega^2(V)$.

2. (1.5p) Soient $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $V = \mathbb{R}^3$. Soit l'application $\varphi : U \to V$ donnée par $\varphi(x_1, x_2) = \left(\sqrt{x_1^2\, e^{2x_1 \cos x_2} + x_2^2\, e^{2x_2 \cos x_1}},\ x_1 e^{x_1 \cos x_2} - x_2 e^{x_2 \cos x_1},\ e^{-x_1 \cos x_2 - x_2 \cos x_1}\right)$.
Trouver $\varphi^*\omega$ pour $\omega = 2y_1y_3\, dy_1 - 2y_2y_3\, dy_2 + (y_1^2 - y_2^2)\, dy_3 \in \Omega^1(V)$.

3. (3p) Soit $U = V = \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$. Soit l'application $\varphi : U \to V$ donnée par $\varphi(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2, x_1x_2\right)$.

√ **a)** Calculer $\det(D\varphi)$.

√ **b)** Soit $\omega = -y_2\, dy_1 + 2y_1\, dy_2 \in \Omega^1(V)$. Écrire ω en coordonnées x_1, x_2 (c.-à-d. trouver $\varphi^*\omega$).

c) Trouver une forme $\omega \in \Omega^2(V)$ non nulle telle que $\varphi^*\omega = c\,\varphi_0^*\omega$, où $c \in \mathbb{R}$ est une constante et $\varphi_0 : U \to V$ est donnée par $\varphi_0(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$.

4. (2p) Soit $U = V = \mathbb{R}^3$. On considère l'application $\varphi : U \to V$ définie par $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \times \mathbf{w}$, où $\mathbf{w}$ est un vecteur fixé. Soit une forme différentielle $\omega \in \Omega^2(V)$ de classe C^1. Montrer que la forme $\varphi^*\omega$ est fermée.
[Indication: calculer $\det(D\varphi)$.]

(à rendre le 11.12 au début de la séance d'exercices)
Les réponses peuvent être données en français ou en anglais.

Définition. Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $X \subset U$ une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$. Soit $\omega = \alpha(\mathbf{x})\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \in \Omega^n(U)$. Alors, on pose $\int_X \omega = \int_X \alpha(\mathbf{x})\, dx_1 \ldots dx_n$.

Définition. Soient $U \subset \mathbb{R}^p$ et $V \subset \mathbb{R}^n$ des ouverts. Soit $X \subset U$ une partie mesurable de $\mathbb{R}^p$. Soit $\varphi : U \to V$ une application de classe C^1. Soit $\omega \in \Omega^p(V)$. On définit *l'intégrale* de ω sur $\varphi(X)$ par $\int_{\varphi(X)} \omega = \int_X \varphi^* \omega$.

Définition. Soient $U \subset \mathbb{R}^2$ et $V \subset \mathbb{R}^3$ des ouverts. Soit $X \subset U$ une partie mesurable de $\mathbb{R}^2$. Soit $\varphi : U \to V$ une application de classe C^1. Soit $\mathbf{v}$ un champ de vecteurs sur V. Alors, $\int_{\varphi(X)} \omega^2_{\mathbf{v}}$ est le *flux* du champ $\mathbf{v}$ à travers la surface $Y = \varphi(X)$.

Lemme. $$\int_{\varphi(X)} \omega^2_{\mathbf{v}} = \int_X \det \begin{pmatrix} v_1(\varphi(\mathbf{x})) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \\ v_2(\varphi(\mathbf{x})) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \\ v_3(\varphi(\mathbf{x})) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} \end{pmatrix} dx_1\, dx_2.$$

√ 1. (1.5p) Soit $\omega = (\sin \pi x_2)\, dx_1 \wedge dx_4 + x_1\, dx_2 \wedge dx_5 + e^{x_1^2}(\sin \pi x_2)\, dx_3 \wedge dx_6 \in \Omega^2(\mathbb{R}^6)$. Soit le cube unité $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \mid 0 \le x_i \le 1 \text{ pour } i = 1, \ldots, 6\}$. Calculer $\int_X \omega \wedge \omega \wedge \omega$.

2. (1.5p) Soit $V = \mathbb{R}^3$. Soit le champ de vecteurs $\mathbf{v} = (4y_2, -y_1, 18y_3^2)$ sur V. Soit la surface $Y = \{\mathbf{y} \in V \mid y_1^2 + 4y_2^2 + 9y_3^2 = 1,\ 0 \le y_3 \le \frac{1}{6}\}$. Calculer le flux du champ $\mathbf{v}$ à travers Y.

3. (1.5p) Soit $V = \mathbb{R}^3$. Soit le champ de vecteurs $\mathbf{v} = (-2y_2, y_1 y_2, y_1 y_3)$ sur V. Soit la surface $Y = \{\mathbf{y} \in V \mid y_1 + y_2 + y_3 = 1,\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0\}$. Calculer le flux du champ $\mathbf{v}$ à travers Y.

4. (4p)

a) Soit $U = \mathbb{R}^2$, $V = \mathbb{R}^4$. Soit $X = \{\mathbf{x} \in U \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$. Soit l'application $\varphi : U \to V$ donnée par $\varphi(x_1, x_2) = (x_1^3, x_1^2 x_2, x_1 x_2^2, x_2^3)$. Calculer $\int_{\varphi(X)} \omega$ où $\omega \in \Omega^2(V)$ est donnée par $\omega = \frac{1}{3} y_1 y_3\, dy_1 \wedge dy_2 + (y_1 y_3 + y_2 y_4)\, dy_2 \wedge dy_3 + \frac{1}{3} y_2 y_4\, dy_3 \wedge dy_4$.

b) Soit $U = \mathbb{R}^3$, $V = \mathbb{R}^4$. Soit $X = \{\mathbf{x} \in U \mid 0 \le x_3 \le x_2 \le x_1 \le 1\}$. Soit l'application $\varphi : U \to V$ donnée par $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2, x_2 x_3, x_1 x_3, x_1 x_2 x_3)$. Calculer $\int_{\varphi(X)} \omega$ où $\omega \in \Omega^3(V)$ est donnée par $\omega = y_4\, dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3 + y_1\, dy_2 \wedge dy_3 \wedge dy_4$.

1/54

(à rendre le 18.12 au début de la séance d'exercices)
Les réponses peuvent être données en français ou en anglais.

Théorème. (la formule de Gauss-Ostrogradski). Soient $U \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert et $B^3 \subset U$ une boule. Soit $V \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert. Soit $\varphi : U \to V$ un C^2-difféomorphisme. Soient $M = \varphi(B^3)$ et ∂M le bord de M. Soit $\mathbf{v}$ un champ de vecteurs sur V de classe C^1. Alors, le flux de $\mathbf{v}$ à travers ∂M est donné par $\int_{\partial M} \omega_{\mathbf{v}}^2 = \int_M \operatorname{div} \mathbf{v} \, dy_1 dy_2 dy_3$.

1. (2p) Soit $V = \mathbb{R}^3$. Soit $Y \subset V$ la surface d'équation $x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 = 1$. Dans les cas suivants, trouver le flux du champ de vecteurs $\mathbf{v}$ à travers Y.

a) $\mathbf{v} = (x_1 \ln(1 + x_1^2) + x_1 x_3, x_2 x_3 - x_2 \ln(1 + x_1^2), \frac{2x_3}{1+x_1^2} - x_3^2)$.

b) $\mathbf{v} = \big(e^{x_1} \sin(x_2 x_3), \cos(x_1 x_3) + e^{x_2} \sin(x_1 x_3), \cos(x_1 x_2 x_3)\big)$.

2. (2p) Soit $V = \mathbb{R}^3$. Soit la surface $Y = \{\mathbf{y} \in V \mid y_1^4 + y_2^4 + y_3 = 1, \, 0 \leq y_3 \leq 1\}$. Soit le champ de vecteurs $\mathbf{v} = (e^{y_1} - e^{y_2}, e^{y_1} + e^{y_2}, -y_3(e^{y_1} + e^{y_2}))$ sur V. Calculer le flux du champ $\mathbf{v}$ à travers Y.

3. (3p) Soit $V = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Soit $\omega_0 = y_3 \, dy_1 \wedge dy_2 - y_2 \, dy_1 \wedge dy_3 + y_1 \, dy_2 \wedge dy_3$.

a) Trouver une fonction $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$ non nulle à une variable telle que la forme $\omega = f(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \, \omega_0$ soit fermée sur V.

b) Soit $\omega = f(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \, \omega_0$ la forme trouvée dans **a)**. Calculer $\int_{S^2} \omega$, où S^2 est la sphère unité de centre $(0,0,0)$. En déduire si ω est exacte.

c) Les résultats obtenus dans **a)** et **b)** sont-ils en accord avec le lemme de Poincaré?